Un algorithme d'ordonnancement optimal dans le cas d'une fabrication contrainte

N. Dridi, Jean-Marie Proth

INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 388

UN ALGORITHME D'ORDONNANCEMENT OPTIMAL DANS LE CAS D'UNE FABRICATION CONTRAINTE

Najoua DRIDI
Jean-Marie PROTH

Mars 1985

UN ALGORITHME D'ORDONNANCEMENT OPTIMAL

DANS LE CAS D'UNE FABRICATION CONTRAINTE

DRIDI Najoua *

PROTH JM. *

* INRIA - ROCQUENCOURT B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

ABSTRACT

This paper is devoted to the search of an optimal production order when the lower and upper bounds of the production starting times are known.

RESUME

Le papier s'intéresse à la recherche d'un ordre de production optimal lorsque les instants de début de fabrication au plus tôt et au plus tard sont connus.

1. INTODUCTION

Nous considérons un ensemble de produits qui doivent passer sur une machine. La durée de fabrication de chaque produit est connue, ainsi que les instants de début de fabrication au plus tôt et au plus tard. Nous cherchons un ordre de passage qui minimise le temps qui sépare l'instant d'entrée du premier produit dans la machine de l'instant de sortie du dernier produit de la même machine. Le paragraphe 2 pose le problème et donne les notations qui seront utilisées. Le pargraphe 3 donne une condition suffisante d'optimalité : si l'ordre croissant des temps de début de fabrication au plus tôt est admissible, cet ordre est optimal. Le pargraphe suivant traite le cas particulier où l'ordre croissant des instants de début de fabrication au plus tôt est aussi l'ordre croissant des instants de fin de fabrication au plus tard. Enfin le paragraphe 5 donne un algorithme général. Le paragraphe 6 est consacré aux exemples.

2. ENONCE DU PROBLEME, NOTATIONS ET DEFINITIONS

Nous considérons n produits, notés 1,2,...,n, qu'il faut faire passer sur une machine unique.

Pour i = 1,2,...,n :

a. Θ_i est le temps de séjour du produit i sur la machine.

b. l'instant de début de fabrication du produit i doit être compris entre t_i^0, instant de début de fabrication au plus tôt, et t_i^1, instant de début de fabrication au plus tard.

c. il nous arrivera d'utiliser les notions de fin de fabrications au plus tôt$\left(\mathcal{U}_i^0\right)$ et de fin de fabrication au plus tard$\left(\mathcal{U}_i^1\right)$.

Bien entendu :

$$\mathcal{U}_i^0 = t_i^0 + \Theta_i$$

et $$\mathcal{U}_i^1 = t_i^1 + \Theta_i$$

On appelle ordre de fabrication $\mathcal{O}$ de l'ensemble $E=\{1,2,..,n\}$ des produits une application de E sur E qui, à un produit, associe son ordre de passage sur la machine.

$$\mathcal{O} : E \rightarrow E$$
$$i \rightarrow \mathcal{O}(i)$$

On parlera de fabrication au plus tôt suivant un ordre $\mathcal{O}$ lorsqu'un produit est lancé sitôt que le précédent est terminé et que le temps de début de fabrication au plus tôt est atteint ou dépassé.

Il est aisé de voir que l'instant de début de fabrication du i^{me} produit suivant l'odre $\mathcal{O}$ lorsqu'on suit une politique "au plus tôt" s'écrit :

$$x_i(\mathcal{O}) = \underset{k=1,\dots,i}{\mathrm{Max}} \left\{ t^o_{\mathcal{O}^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{i-1} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(s)} \right\} \qquad (1)$$

en faisant la convention :

$$\sum_{s=i}^{j} \cdot = 0 \text{ si } j < i \qquad (2)$$

On parlera de fabrication au plus tard suivant l'ordre $\mathcal{O}$ lorsqu'un produit est lancé après que le précédent soit terminé et le plus tard possible.

Dans la suite nous n'envisagerons que des fabrications suivant une politique "au plus tôt", et nous ne préciserons plus cette politique afin de ne pas alourdir l'exposé.

Un ordre $\mathcal{O}$ est admissible s'il autorise le début de fabrication de tout produit i avant son instant de début de fabrication au plus tard, ce qui s'écrit (c.f. (1)) :

$$x_i(\mathcal{O}) \leq t^1_{\mathcal{O}^{-1}(i)} \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n \qquad (3)$$

Nous dirons que l'ordre $\mathcal{O}$ est optimal s'il minimise le temps total nécéssaire pour fabriquer les n produits, c'est à dire, la quantité :

$$x_n(\mathcal{O}) + \theta \quad \mathcal{O}^{-1}(n) \tag{4}$$

Dans ce papier, nous recherchons un ordre optimal pour fabriquer l'ensemble des produits.

Nous commençons par l'étude d'un cas particulier : c'est le cas pour lequel l'odre croissant des instants de début de fabrication au plus tôt est aussi l'odre croissant des instants de fabrication au plus tard.

3. UNE CONDITION SUFFISANTE D'OPTIMALITE

Soit $\mathcal{O}$ l'ordre croissant des instants de début de fabrication au plus tôt.

Nous allons établir le résultat suivant :

THEOREME I

Si $\mathcal{O}$ est admissible, il est optimal.

Démonstration

Soit $\mathcal{O}_1$ un ordre admissible quelconque.

Si les produits sont fabriqués au plus tôt suivant l'odre $\mathcal{O}$, l'instant de fin de fabrication de l'ensemble des produits s'écrit :

$$T_n(\mathcal{O}) = \operatorname*{Max}_{k=1,2,\ldots n} \left\{ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{n} \theta \quad \mathcal{O}^{-1}(s) \right\} \tag{5}$$

De même si les produits sont fabriqués au plus tôt suivant l'odre $\mathcal{O}_1$, l'instant de fin de fabrication de l'ensemble des produits s'écrit:

$$T_n(\mathcal{O}_1) = \operatorname*{Max}_{k=1,2,\ldots,n} \left\{ t^0_{\mathcal{O}_1^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{n} \theta \quad \mathcal{O}_1^{-1}(s) \right. \tag{6}$$

Soit k_1 la valeur de k qui réalise le maximum (5) et k_2 le plus grand entier tel que :

$$E_1 = \left\{ \mathcal{O}_1^{-1}(k_2), \ldots, \mathcal{O}_1^{-1}(n) \right\} \supset E = \left\{ \mathcal{O}^{-1}(k_1), \ldots, \mathcal{O}^{-1}(n) \right\} \tag{7}$$

On voit que :

$$\text{card } (E_1) \geq \text{card } (E)$$

Comme k_2 est le plus grand entier qui réalise (7) :

$$\mathcal{O}_1^{-1}(k_2) \in E \tag{8}$$

D'où par définition de l'ordre $\mathcal{O}$:

$$t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k_1)} \leq t^0_{\mathcal{O}_1^{-1}(k_2)} \tag{9}$$

De plus, (7) permet d'écrire :

$$\sum_{s=k_1}^{n} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(s)} \leq \sum_{s=k_2}^{n} \theta_{\mathcal{O}_1^{-1}(s)} \tag{10}$$

En additionnant (9) et (10) membre à membre, il vient :

$$t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k_1)} + \sum_{s=k_1}^{n} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(s)} \leq t^0_{\mathcal{O}_1^{-1}(k_2)} + \sum_{s=k_2}^{n} \theta_{\mathcal{O}_1^{-1}(s)}$$

D'où, par définition de k_1 :

$$T_n(\mathcal{O}) \leq t^0_{\mathcal{O}_1^{-1}(k_2)} + \sum_{s=k_2}^{n} \theta_{\mathcal{O}_1^{-1}(s)} \tag{11}$$

et, en tenant compte de (6), l'inégalité (11) conduit à :

$$T_n(\mathcal{O}) \leq T_n(\mathcal{O}_1)$$

Ce qui achève la démonstration.

4. UN CAS PARTICULIER

Supposons que $\mathcal{O}$, ordre croissant des instants de début de fabrication au plus tôt, soit aussi l'ordre croissant des instants de fin de fabrication au plus tard.

Alors on montre le résultat suivant :

THEOREME II

Sous l'hypothèse ci-dessus, si $\mathcal{O}$ n'est pas admissible, le problème n'admet aucune solution admissible.

DEMONSTRATION

Supposons que $\mathcal{O}$ ne soit pas admissible. Alors il existe $k_1 \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que :

$$\underset{k=1,\ldots,k_1}{\text{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{k_1-1} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(s)} \right\} > t^1_{\mathcal{O}^{-1}(k_1)} \tag{12}$$

(Nous faisons toujours la convention (2)).

$$\underset{k=1,\dots k_1}{\text{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{k_1} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(s)} \right\} > \mathcal{U}^1_{\mathcal{O}^{-1}(k)} \tag{13}$$

La relaltion (12) indique que le produit de rang k_1 suivant l'ordre $\mathcal{O}$ ne pourra pas commencer à être fabriqué avant son instant de début de fabrication au plus tard. la relation (13) indique que le même produit ne sera pas terminé avant son instant de fin de fabrication au plus tard.

Soit maintenant $\mathcal{O}_1$ un ordre de fabrication quelconque et k_2 le plus petit entier vérifiant :

$$F_1 = \left\{\mathcal{O}_1^{-1}(1), \dots, \mathcal{O}_1^{-1}(k_2)\right\} \supset \left\{\mathcal{O}^{-1}(1), \dots, \mathcal{O}^{-1}(k_1)\right\} = F \tag{14}$$

b1. En appliquant la relation précédente aux produits de F_1, nous pouvons écrire :

$$\underset{k=1,\dots,k_2}{\text{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}_1^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{k_2} \theta_{\mathcal{O}_1^{-1}(s)} \right\}$$

$$\geq \underset{k=1,\dots,k_2}{\text{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k/F_1)} + \sum_{s=k}^{k_2} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(s/F_1)} \right\} \tag{15}$$

où $\mathcal{O}(\bullet/F_1)$ est l'ordre croissant des instants de début de fabrication au plus tôt appliqué à l'ensemble des pièces de F_1.

b2. Comme $F_1 \supset F$ (voir (14)) et que F représente les k_1 premiers produits de E lorsqu'il sont classés dans l'odre croissant de leur instant de début de fabrication au plus tôt, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{O}^{-1}(k/F_1) = \mathcal{O}^{-1}(k) \text{ pour } k=1,2,\dots,k_1.$$

si bien que :

$$\underset{k=1,\dots,k_2}{\text{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k/F_1)} + \sum_{s=k}^{k_2} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(s/F_1)} \right\}$$

$$\geq \underset{k=1,\dots,k_1}{\text{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{k_1} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(k)} \right\} \tag{16}$$

Finalement, nous déduisons de (15) et (16) :

$$\underset{k=1,\dots,k_2}{\mathrm{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}_1^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{k_2} \theta_{\mathcal{O}_1^{-1}(s)} \right\} \geq$$

$$\underset{k=1,\dots,k_1}{\mathrm{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{k_1} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(k)} \right\} \tag{17}$$

D'autre part (voir (14)) $\mathcal{O}_1^{-1}(k_2) \in F$ et donc :

$$\mathcal{U}^1_{\mathcal{O}^{-1}(k_1)} \geq \mathcal{U}^1_{\mathcal{O}_1^{-1}(k_2)} \tag{18}$$

En considérant (13), (17) et (18), nous aboutissons finalement à :

$$\underset{k=1,\dots,k_2}{\mathrm{Max}} \left\{ t^0_{\mathcal{O}_1^{-1}(k)} + \sum_{s=k}^{k_2} \theta_{\mathcal{O}_1^{-1}(s)} \right\} \geq \mathcal{U}^1_{\mathcal{O}_1^{-1}(k_2)}$$

Cette relation indique qu'en fabriquant suivant l'ordre $\mathcal{O}_1$, le produit de rang k_2 sera terminé après son instant de fin de fabrication au plus tard. $\mathcal{O}_1$ n'est donc pas admissible.

Ceci achève la démonstration. □

5. CAS GENERAL

A) UN THEOREME DE DECOMPOSITION

C'est le cas où l'ordre croissant des instants de fabrication au plus tôt et l'ordre croissant des instants de fabrication au plus tard sont différents.

Nous avons vu (cf. paragraphe 3) que, si les produits sont fabriqués au plus tôt, et si cette solution est admissible, alors elle est optimale.

Nous supposons maintenant que cette solution n'est pas admissible, c'est à dire qu'elle conduit à finir la fabrication de certains produits après leur instant de fin de fabrication au plus tard.

THEOREME III

Soit $\mathcal{O}_1$ un ordre admissible et m un entier tel que $1<m<n$;
soit :

$$E_1=\left\{\mathcal{O}_1^{-1}(1),\dots,\mathcal{O}_1^{-1}(m)\right\} \text{ et } E_2^1=\left\{\mathcal{O}_1^{-1}(m+1),\dots,\mathcal{O}_1^{-1}(n)\right\}$$

On suppose que :

1) La restriction de $\mathcal{O}_1$ aux produits de E_1 est optimale (19)
2) La restriction de $\mathcal{O}_1$ au produits de E_2 est optimale (20)
3) $\max\limits_{i\in E_1} t_i^0 \leq \min\limits_{i\in E_2} t_i^0$ (21)

Alors $\mathcal{O}_1$ est optimal.

DEMONSTRATION

On utilise les notations suivantes :

$T_n(\mathcal{O}_1)$: l'instant de fin de fabrication des n produits selon l'ordre $\mathcal{O}_1$

T_1 : l'instant de fin de fabrication des produits de E_1 selon l'ordre $\mathcal{O}_1$

T_2 : l'instant de fin de fabrication des produits de E_2 selon l'ordre $\mathcal{O}_1$

Ces trois instants s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_n(\mathcal{O}_1) &= \max_{i=1,\dots,n}\left(t^0\,\mathcal{O}_1^{-1}(i)+\sum_{j=1}^{n}\theta\,\mathcal{O}_1^{-1}(j)\right) \\ &= \max\left(\max_{i=1,\dots,m}\left(t^0\,\mathcal{O}_1^{-1}(i)+\sum_{j=1}^{n}\theta\,\mathcal{O}_1^{-1}(j)\right),\right. \\ &\qquad \left.\max_{i=m+1,\dots,n}\left(t^0\,\mathcal{O}_1^{-1}(i)+\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}_1^{-1}(j)\right)\right) \end{aligned}$$

$$T_1=\max_{i=1\dots,m}\left(t^0\,\mathcal{O}_1^{-1}(i)+\sum_{j=1}^{n}\theta\,\mathcal{O}_1^{-1}(j)\right)$$

$$T_2=\max_{i=m+1,\dots,n}\left(t^0\,\mathcal{O}_1^{-1}(i)+\sum_{j=1}^{n}\theta\,\mathcal{O}_1^{-1}(j)\right)$$

On peut alors écrire :

$$T_n(\mathcal{O}_1)= \mathrm{Max}\left(T_1+\sum_{j=m+1}^{n}\theta\ \mathcal{O}_1^{-1}(j),\ T_2\right)$$

Soit $\mathcal{O}$ un autre ordre admissible. Soit k le plus petit entier vérifiant :

$$E_1' =\left\{\mathcal{O}^{-1}(1),\dots,\ \mathcal{O}^{-1}(k)\right\}\supset\ E_1\quad ,$$

et l le plus grand entier vérifiant :

$$E_2' =\left\{\mathcal{O}^{-1}(l+1),\dots,\ \mathcal{O}^{-1}(n)\right\}\supset\ E_2$$

(E_1' est le plus petit ensemble contenant E_1, de même pour E_2'.)

Deux cas se présentent :

a) $E_1' = E_1$ (alors $E_2' = E_2$ et k=l=m)

$$T_n(\mathcal{O})=\mathrm{Max}\left(\underset{i=1,\dots,m}{\mathrm{Max}}\left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}+\sum_{j=1}^{n}\theta\ \mathcal{O}^{-1}(j)\right),\right.$$

$$\left.\underset{i=m+1,\dots,n}{\mathrm{Max}}\left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}+\sum_{j=1}^{n}\theta\ \mathcal{O}^{-1}(j)\right)\right)$$

On peut écrire :

$$T_n(\mathcal{O}) = \mathrm{Max}\left(T_1' +\sum_{j=m+1}^{n}\theta\ \mathcal{O}^{-1}(j),\ T_2'\right)$$

où T_1' (resp. T_2') représente l'instant de fin de fabrication des produits de E_1' (resp. E_2') suivant l'ordre $\mathcal{O}$.

d'après (19) $T_1' \geq T_1$ et d'après (20) $T_2' \geq T_2$ d'où :

$$t_n(\mathcal{O}) \geq \mathrm{Max}\left(T_1+\sum_{j=m+1}^{n}\theta\ \mathcal{O}^{-1}(j),\ T_2\right) \tag{22}$$

Comme $E_2' = E_2$ on a :

$$\sum_{j=m+1}^{n}\theta\ \mathcal{O}^{-1}(j)=\sum_{j\in E_2}\theta_j = \sum_{j=m+1}^{n}\theta\ \mathcal{O}_1^{-1}(j)$$

(22) s'écrit alors $t_n(\mathcal{O}) \geq T_n(\mathcal{O}_1)$ d'où l'optimalité de $\mathcal{O}_1$

b) $E'_1 \not\supseteq E_1$ (on aura alors $E_1 \cap E'_2 \neq \emptyset$ et $E_2 \cap E'_1 \neq \emptyset$)

Montrons tout d'abord que dans ce cas on a :

$$T'_1 \geq T_1 + \sum_{j \in E'_1 \cap E_2} \theta_j \tag{23}$$

Soit $\mathcal{O}'$: la restriction de l'ordre $\mathcal{O}$ à E_1, posons T''_1 : l'instant de fin de fabrication suivant l'ordre $\mathcal{O}'$ de tous les produits de E_1 :

$$T''_1 = \operatorname*{Max}_{i=1,\dots,m} \left(t^0_{\mathcal{O}'^{-1}(i)} + \sum_{j=i}^{m} \theta_{\mathcal{O}'^{-1}(j)} \right)$$

Soit j_0 le rang du produit vérifiant ce maximum suivant $\mathcal{O}'$:

$$T''_1 = t^0_{\mathcal{O}'^{-1}(j_0)} + \sum_{j=j_0}^{m} \theta_{\mathcal{O}'^{-1}(j)}$$

d'après (19) $\quad T''_1 \geq T_1$

d'après (21) : $\forall\, j \in E'_1 \cap E_2 \subset E_2 \quad t^0_j \geq t^0_{\mathcal{O}'^{-1}(j_0)}$

(21) veut dire que : la fabrication d'un produit quelconque de $E'_1 \cap E_2$ ne peut commencer avant $t^0_{\mathcal{O}'^{-1}(j_0)}$

On aura alors :

$$T'_1 \geq T''_1 + \sum_{j \in E'_1 \cap E_2} \theta_j \geq T_1 + \sum_{j \in E'_1 \cap E_2} \theta_j , \qquad \text{d'où (23)}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{O}_1$ est optimal :

L'instant de fin de fabrication suivant $\mathcal{O}$:

$$T_n(\mathcal{O}) = \operatorname{Max}\left(\operatorname*{Max}_{i=1,\dots,l} \left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)} + \sum_{j=i}^{n} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)} \right), \right.$$

$$\left. \operatorname*{Max}_{i=l+1,\dots,n} \left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)} + \sum_{j=i}^{n} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)} \right) \right)$$

Comme $E'_2 \supset E_2$ et d'après (20) on a :

$$T_n(\mathcal{O}) \geq \operatorname*{Max}_{i=l+1\dots,n} \left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)} + \sum_{j=i}^{n} \theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)} \right) \geq T_2 \tag{24}$$

$T_n(\mathcal{O})$ s'écrit aussi :

$$T_n(\mathcal{O})=\mathrm{Max}\left(\underset{i=1,\dots,k}{\mathrm{Max}}\left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}+\sum_{j=1}^{n}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)}\right),\right.$$

$$\left.\underset{i=k+1,\dots,n}{\mathrm{Max}}\left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}+\sum_{j=1}^{n}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)}\right)\right)$$

Ce qui donne :

$$T_n(\mathcal{O})\geq \underset{i=1,\dots,k}{\mathrm{Max}}\left(t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}+\sum_{j=1}^{k}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)}\right)+\sum_{j=k+1}^{n}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)}$$

Ce qui s'écrit :

$$T_n(\mathcal{O})\geq T'_1+\sum_{j=k+1}^{n}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)}$$

D'après (23) on a :

$$T_n(\mathcal{O})\geq T_1+\sum_{j\in E'_1\cap E_2}\theta_j+\sum_{j=k+1}^{n}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)}$$

Comme :

$$\sum_{j=k+1}^{n}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)}=\sum_{j\in E_2-E'_1}\theta_j \quad \text{et } E_2=(E_2-E'_1)\cup(E'_1\cap E_2)$$

On aura :

$$T_n(\mathcal{O})\geq T_1+\sum_{j\in E_2}\theta_j \tag{25}$$

(24) et (25) donnent :

$$T_n(\mathcal{O})\geq \mathrm{Max}\left(T_1+\sum_{j=m+1}^{n}\theta_{\mathcal{O}^{-1}(j)},\ T_2\right)$$

i.e. $\quad T_n(\mathcal{O})\geq T_n(\mathcal{O}_1)$

Autrement dit $\mathcal{O}_1$ est optimal.

B) PROPRIETE DU CONTROLE OPTIMAL

On note $E=\left\{1,2,\ldots,n\right\}$ les n produits à fabriquer.

Soit $\mathscr{O}$ un ordonnancement : $\mathscr{O}: E \longrightarrow E$, $\mathscr{O}$ est une bijection qui à un produit k, associe son ordre de passage $\mathscr{O}(k)$.

On note, pour i=1,...,n,

$$S_i^{\mathscr{O}} = \left\{k \in E \;/\; \mathscr{O}(k) < i\right\},$$

et comme au paragraphe 2, $\mathcal{U}_i^1$ indique l'instant de fin de fabrication au plus tard et $T_i(\mathscr{O})$, l'instant de fin de fabrication du produit placé au rang i suivant l'ordonnancement $\mathscr{O}$.

Pour i=1,...,n, on definit les ensembles A_i de la façon suivante :

$$A_1^{(\emptyset)} = \left\{k \in E \;/\; t_k^0 < \min_{k' \in E}\left(t_{k'}^0 + \theta_{k'}\right)\right\}$$

$$A_i\left(\left\{\mathscr{O}^{-1}(1),\ldots,\mathscr{O}^{-1}(i-1)\right\}\right) = \left\{k \in E-S_i^{\mathscr{O}} \;/\; t_k^0 < \min_{k' \in E-S_i^{\mathscr{O}}}\left[\operatorname{Max}\left(T_{i-1}(\mathscr{O}), t_{k'}^0\right) + \theta_{k'}\right]\right\}$$

Si les n produits admettent au moins un ordonnacement admissible, alors il existe un ordonnacement optimal $\mathscr{O}_1$ vérifiant :

$$\mathscr{O}_1(i) \in A_i\left(\left\{\mathscr{O}_1^{-1}(1),\ldots,\mathscr{O}_1^{-1}(i-1)\right\}\right) \text{ pour } i=1,2,\ldots,n \tag{19}$$

<u>DEMONSTRATION</u>

Soit $\mathscr{O}$ un ordonnancement optimal ne vérifiant pas (19).

Soit i, le plus petit rang de $\mathscr{O}$ tel que :

$$\mathscr{O}^{-1}(i) \notin A_i\left(\left\{\mathscr{O}^{-1}(1),\ldots,\mathscr{O}^{-1}(i-1)\right\}\right) \tag{20}$$

Soit k_0, le produit de $A_i\left(\left\{\mathscr{O}^{-1}(1),\ldots,\mathscr{O}^{-1}(i-1)\right\}\right)$, qui donne le plus petit instant de fin de fabrication s'il est placé au rang i, autrement dit :

$$\operatorname{Max}\left(T_{i-1}(\mathscr{O}),\, t_{k_0}^0\right) + \theta_{k_0} = \min_{\substack{k' \in E \\ \text{et } k' \notin S_i^{\mathscr{O}}}}\left[\operatorname{Max}\left(t_{i-1}(\mathscr{O}),\, t_{k'}^0\right) + \theta_{k'}\right]$$

k_0 appartient à $A_i\left(\{\mathcal{O}^{-1}(1),\ldots,\ \mathcal{O}^{-1}(i-1)\}\right)$ implique que $\mathcal{O}(k_0)\geq i$, et d'après (20) $\mathcal{O}(k_0)>i$.

Nous allons construire l'ordonnancement $\mathcal{O}'$ de la façon suivante :

$$\mathcal{O}'^{-1}(j)=\mathcal{O}^{-1}(j) \qquad \text{pour } j=1,\ldots,i-1 \qquad (21)$$

$$\mathcal{O}'^{-1}(i)=k_0 \qquad (22)$$

$$\mathcal{O}'^{-1}(j)=\mathcal{O}^{-1}(j-1) \qquad \text{pour } j=i+1,\ldots,\ \mathcal{O}(k_0) \qquad (23)$$

$$\mathcal{O}'^{-1}(j)=\mathcal{O}^{-1}(j) \qquad \text{pour } j=\mathcal{O}(k_0)+1,\ldots,n \qquad (24)$$

Nous avons alors :

$$\mathcal{O}'^{-1}(i)\in A_i\left(\{\mathcal{O}'^{-1}(1),\ldots,\ \mathcal{O}'^{-1}(i-1)\}\right)$$

et nous allons montrer que $\mathcal{O}'$ est optimal.

D'après (21) on a :

$$T_j(\mathcal{O}')=T_j(\mathcal{O}) \qquad \text{pour } j=1,\ldots,i-1$$

$$T_i(\mathcal{O}')=\max\left(T_{i-1}(\mathcal{O}'),\ t^0_{k_0}\right)+\theta_{k_0}=$$

$$\max\left(T_{i-1}(\mathcal{O}),\ t^0_{k_0}\right)+\theta_{k_0}\leq t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)} \qquad (25)$$

(inégalité obtenue avec (20)).

(23) puis (25) donnent :

$$T_{i+1}(\mathcal{O}')=\max\left(T_i(\mathcal{O}'),\ t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}\right)+\theta_{\mathcal{O}^{-1}(i)}=$$

$$t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}+\theta_{\mathcal{O}^{-1}(i)}=T_i(\mathcal{O})$$

D'après (23) on aura de même :

$$T_j(\mathcal{O}')=T_{j-1}(\mathcal{O}) \qquad \text{pour } j=i+1,\ldots,\ \mathcal{O}(k_0)$$

Comme les instants de fabrication croissent avec les rangs, la dernière égalité implique :

$$T_j(\mathcal{O}')\leq T_j(\mathcal{O}) \qquad \text{pour } j=i+1,\ldots,\ \mathcal{O}(k_0) \qquad (26)$$

(26) puis (24) donnent :

$$T_{\mathcal{O}(k_0)+1}(\mathcal{O}') = \max\left(T_{\mathcal{O}(k_0)}(\mathcal{O}'),\ t^0_{\mathcal{O}'^{-1}}\left(\mathcal{O}(k_0)+1\right)\right) +$$

$$\theta_{\mathcal{O}^{-1'}}\left(\mathcal{O}(k_0)+1\right) \leq \max\left(T_{\mathcal{O}(k_0)}(\mathcal{O}),\ t^0_{\mathcal{O}^{-1}}\left(\mathcal{O}(k_0)+1\right)\right)$$

$$+\ \theta_{\mathcal{O}^{-1}}\left(\mathcal{O}(k_0)+1\right) = T_{\mathcal{O}(k_0)+1}(\mathcal{O})$$

$$T_{\mathcal{O}(k_0)+1}(\mathcal{O}') \leq T_{\mathcal{O}(k_0)+1}(\mathcal{O})$$

Grâce à (24) l'inégalité reste vraie pour $j=\mathcal{O}(k_0)+1,\dots,n$

$$T_j(\mathcal{O}') \leq T_j(\mathcal{O}) \qquad \text{pour } j= \mathcal{O}(k0)+1,\dots,n$$

Plus particulièrement :

$$T_n(\mathcal{O}') \leq t_n(\mathcal{O})$$

comme $\mathcal{O}$ est optimal, on aura :

$$T_n(\mathcal{O}') = T_n(\mathcal{O})$$

et $\mathcal{O}'$ est aussi optimal.

Si $\mathcal{O}'$ne verifie toujours pas (19), on refait les mêmes transformation jusqu'à obtenir un ordonnancement optimal vérifiant le théorème.

L'algorithme que nous proposons est du type branch-and-bound, examinant tous les ordonnancements admissibles vérifiant (19), en retenant celui qui donne le plus faible instant de fin de fabrication.

Dans la suite, on utilise la notion A_i pour $A_i\left(\mathcal{O}^{-1}(1),\ldots,\mathcal{O}^{-1}(i-1)\right)$

C. ALGORITHME

1. Rechercher l'ordre croissant des instants de fabrication au plus tôt.
2. Faire :

$$T = \max_{i=1,n} (\mathcal{U}_i^1)$$

$$D = \emptyset$$

$$T_0(\mathcal{O}) = 0$$

$$S_1^{\mathcal{O}} = \emptyset$$

$$i = 0$$

$$E = \{1,2,\ldots,n\}$$

3. Faire :

$$i = i+1$$

4. Test :

4.1. Si $i > n$, aller en 7

4.2. Calculer :

$$A_i = \left\{ k \in E-S_i^{\mathcal{O}} \;/\; t_k^0 < \min_{k' \in E-S_i^{\mathcal{O}}} \left[\max\left(T_{i-1}(\mathcal{O}),\, t_{k'}^0\right) + \theta_{k'} \right] \right\}$$

$$A'_i = \left\{ k \in A_i \;/\; t_k^0 \leq T_{i-1}(\mathcal{O}) \right\}$$

4.3. Test

4.3.1. Si $A'_i \neq \emptyset$, placer le produit k de A'_i, ayant le plus petit instant de fin de fabrication au plus tard.

Faire :

$$A'_i = A'_i - (k)$$

$$A_i = A_i - (k), \quad \text{aller en 4.3.4.}$$

4.3.2. Si $A_i \neq \emptyset$, placer le produit k de A_i, ayant le plus petit temps de début de fabrication au plus tôt.

Faire :

$$A_i = A_i - (k), \quad \text{aller en 4.3.4.}$$

4.3.3. Si $A_i = \emptyset$, aller en 6.

4.3.4. Calculer le temps de fin de fabrication du produit k.
Faire :

$\mathcal{O}(k)=i$

5. Test :

5.1. Si $T_i(\mathcal{O}) \leq \mathcal{U}_k^1$, faire :

$S_{i+1}^{\mathcal{O}} = S_i^{\mathcal{O}} \cup \{k\}$, aller en 3.

5.2. Sinon, chercher le dernier produit, placé avant le produit k, ayant un temps de fabrication au plus tard plus grand que celui de k et tel que t_k^0 soit strictement plus petit que le temps de fin de fabrication de ce produit.
Test :

5.2.1. Si un tel produit existe, soit i_0 son rang.
Faire :

$i=i_0$, aller en 4.3.1.

5.2.2. Si un tel produit n'existe pas.
Faire :

$i=1$, aller en 4.3.1.

6. Test :

6.1. Si $i=1$, aller en 8.

6.2. Si $i=n$, faire :

6.2.1. Si $i=1$ aller en 8.

6.2.2. Si $T_{i-1} \geq t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}$, faire :

$i=i-1$, aller en 6.2.1.

6.2.3. Si $T_{i-1} < t^0_{\mathcal{O}^{-1}(i)}$, aller en 6.

6.3. Faire $i=i-1$, aller en 4.2.1.

7. Test :

7.1. Si $T \geq T_n(\mathcal{O})$, garder dans D l'ordonnancement obtenu.
Faire :

$T=T_n(\mathcal{O})$

7.2. Si $T \leq T_n(\mathcal{O})$, aller en 6.

8. Test :

8.1. Si $D=\emptyset$, pas de solution. Aller en fin de programme.

8.2. D contient un ordonnancement optimal.

EXEMPLE

Produits	t_i^0	$\mathcal{O}_i$	$\mathcal{U}_i^1$
1	0	4	19
2	3	4	12
3	10	5	16
4	1	5	21

L'ordre des produits suivant les t_i^0 croissants et : 1,4,2,3.

a) Pour i=1 $A_1=\{1,4,2\}$, $A'_1=\{1\}$

Nous sommes dans le cas 4.2.1. On place le produit 1.

On aura :

$$T_1(\mathcal{O})=4 \quad , \quad A'_1=\emptyset \quad , \quad A_1=\{4,2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(1)=1$$

On a :

$$T_1(\mathcal{O})\leq\mathcal{U}_1^1 \quad , \quad S_2^{\mathcal{O}}=\{1\}$$

b) $A_2=\{4,2\}$, $A'_2=A_2$

On place le produit 2 (voir 4.2.1.)

On aura :

$$A'_2=\{4\} \quad , \quad A_2=\{4\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(2)=2$$

$T_2(\mathcal{O})=8 \leq \mathcal{U}_2^1$ $\qquad S_3^{\mathcal{O}} = \{1,2\}$

On revient en 3. i=3

c) $A_3= \{4,3\}$ $\qquad A'_3= \{4\}$

On place le produit 4 au 3ème rang ce qui nous donne :

$$T_3(\mathcal{O})=13 \quad , \quad A'_3=\emptyset \quad , \quad A_3=\{3\}$$

et

$$\mathcal{O}(4)=3, \qquad S_4^{\mathcal{O}} = \{1,2,4\}$$

d) Reste à placer le produit 3 au 4ème rang ($A_4=\{3\}=A'_4$)

Cela nous donne :

$$T_4(\mathcal{O})=18 \quad , \quad A_4=\emptyset \quad , \quad A'_4=\emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(3)=4$$

Mais $T_4(\mathcal{O})>\mathcal{U}_3^1$ (nous sommes dans le cas 5.2), le produit 4 est le dernier produit placé avant 3, avec $\mathcal{U}_4^1>\mathcal{U}_3^1$ et $t_3^0 < T_3(\mathcal{O})$.

On va essayer d'autres possiblités au rang 3, à la place du produit 4 :

$$A_3=\{3\} \quad \text{avec} \quad A'_3=\emptyset$$

En plaçant 3 au rang 3, on obtient :

$$T_3(\mathcal{O})=15 \quad , \quad A'_3=A_3=\emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(3)=3$$

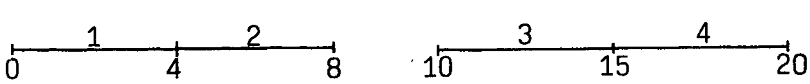
$$T_3(\mathcal{O})\leq\mathcal{U}_3^1 \qquad S_4^{\mathcal{O}} = \{1,2,3\}$$

Reste à placer le produit 4 au rang 4. ($A_4=\{4\}=A'_4$).

On aura :

$$T_4(\mathcal{O})=20 \quad , \quad \mathcal{O}(4)=4 \;, \quad A'_4=A_4=\emptyset \quad , \quad \text{avec } T_4(\mathcal{O})\leq\mathcal{U}_4^1$$

On garde l'ordonnancement obtenu dans D : $D=\{1,2,3,4\}$, et le temps de fin de fabrication dans T : T=20.



Examinons maintenant les possibilités de choix qu'il reste au rang 2.
(On applique 6.2. puis 6.3.)

On a $A'_2=\{4\}=A_2$, d'après 4.2.1., on place 4 au rang 2.

On aura :

$$T_2(\mathcal{O})=9\leq\mathcal{U}_4^1 \quad , \quad A'_2=A_2=\emptyset \quad , \quad \mathcal{O}(4)=2$$

et

$$S_3^{\mathcal{O}}=S_2^{\mathcal{O}}\cup\left\{4\right\} = \left\{1,4\right\}$$

Maintenant on aura : $A_3=\left\{2,3\right\}$, $A_3'=\left\{2\right\}$, on place 2 au rang 3 :

$$T_3(\mathcal{O})=13 \quad , \quad A_3=\left\{3\right\} \quad , \quad A_3'=\emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(2)=3$$

Mais $T_3(\mathcal{O})>\mathcal{U}_2^1$ (voir 5.2.), le dernier produit placé avant le produit 2 et vérifiant 5.2. est 4, son rang est 2.

Au rang 2, toutes les possibilités ont été étudiées : $A_2=A_2'=\emptyset$.

On recule encore d'un rang (6.3.). Au rang 1, les possibilités qu'il reste à voir, sont soit placer 4, soit placer 2. ($A_1=\left\{4,2\right\}$)

On place 4 (4.2.2.) : $T_1(\mathcal{O})=6$, $\mathcal{O}(4)=1$, $A_1=\left\{2\right\}$, $A_1'=\emptyset$

$T_1(\mathcal{O})\leq\mathcal{U}_4^1$, $S_2^{\mathcal{O}}=\left\{4\right\}$. On calcule A_2 et A_2' : $A_2=\left\{1,2\right\}=A_2'$.

On place au rang 2 le produit 2 :

$$T_2(\mathcal{O})=10 \quad , \quad \mathcal{O}(2)=2 \quad , \quad A_2'=A_2=\left\{1\right\}$$

$$T_2(\mathcal{O})\leq\mathcal{U}_2^1 \quad , \quad S_3^{\mathcal{O}}=\left\{4,2\right\} \quad .$$

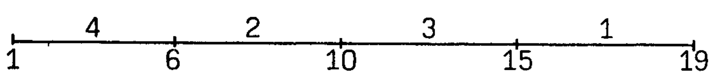
Pour le 3ème rang : $A_3=\left\{1,3\right\}=A_3'$. On place le produit 3 (voir 4.2.1.) :

$$T_3(\mathcal{O})=15\leq\mathcal{U}_3^1 \quad , \quad A_3'=\left\{1\right\}=A_3 \quad , \quad \mathcal{O}(3)=3 \quad , \quad S_4^{\mathcal{O}}=\left\{4,2,3\right\}$$

Reste le produit 1 à placer, on aura $T_4(\mathcal{O})=19\leq\mathcal{U}_4^1$.

Comme $t_4(\mathcal{O})<T$, on garde dans D, le dernier ordonnancement.

$D=\left\{4,2,3,1\right\}$ et on fait T = 19



En appliquant 6.2 puis 6.1 puis 8, on trouve que l'odonnancement optimal est celui contenu dan D, c'est à dire : 4,2,3,1, avec un temps de fin de fabrication égal à 19.

D. LOGICIEL

```
      subroutine opt(n,t0,t1,tet,id,T,ttd,ttf)
c
c***********************************************************************
c*****************************  ENTREES  *******************************
c***********************************************************************
c  REMARQUE    : LES PRODUITS ONT DEJA ETE ORDONNES SUIVANT LEUR INSTANT
c  --------      DE DEBUT DE FABRICATION AU PLUS TOT.
c
c
c n              : Nombre de produits
c t0(i),i=1,n : Instant de debut de fabrication au plus tot du produit i.
c t1(i),i=1,n : Instant de fin de fabrication au plus tard du produit i.
c tet(i),i=1,n: Duree de fabrication du produit i.
c
c***********************************************************************
c*****************************  SORTIES  *******************************
c***********************************************************************
c id(i),i=1,n : S'il existe un ordonnancement admissible,id(i) contiendra
c               le numero du produit place au rang i suivant l'ordonnacement
c               optimal obtenu.
c T             : Instant optimal de fin de fabrication des n produits
c ttd(i),i=1,n: Instant de debut de fabrication du produit place au rang
c               i suivant l'ordre optimal (si cet ordre existe).
c ttf(i),i=1,n: Instant de fin de fabrication du produit place au rang
c               i suivant l'ordre optimal.
c
c***********************************************************************
c***********************************************************************
c***********************************************************************
c
      dimension ia(50),ib(50),A(50,50),B(50,50),t0(50),t1(50),tet(50)
      dimension ttd(50),ttf(50),id(50),ik(50),td(50),tf(50)
c-----------------------------------------------------------------------
c  INITIALISATION
c-----------------------------------------------------------------------
      t=0.
      T=0.
      eps=1.e-3
      do 5 i=1,n
      ia(i)=0
      ib(i)=0
      id(i)=0
      td(i)=0
      tf(i)=0
      T=amax1(t1(i),T)
 5    continue
      do 10 i=1,n
      do 15 j=1,n
      A(i,j)=0.
      B(i,j)=0.
 15   continue
 10   continue
      i=0
```

```
c  RECHERCHE DES PRODUITS CANDIDATS AU PLACEMENT AU RANG i.
c-----------------------------------------------------------------------------
 100  if(i.ge.n)go to 500
      i=i+1
      k=0
      w=0.
      jk=0
      do 20 ii=1,n
      if(ib(ii).ne.0)go to 20
      if(jk.eq.0)go to 21
      w=amin1(w,amax1(t,t0(ii))+tet(ii))
      go to 20
 21   w=amax1(t,t0(ii))+tet(ii)
      jk=jk+1
 20   continue
      do 25 j=1,n
      if((ib(j).ne.0).or.(t0(j).ge.w-eps))go to 25
      k=k+1
      A(i,k)=j
 25   continue
      ik(i)=k
c-----------------------------------------------------------------------------
c  PLACEMENT DU PRODUIT jk AU RANG i.
c-----------------------------------------------------------------------------
 200  j1=0
      do 30 j=1,ik(i)
      jk=A(i,j)
      if(B(i,jk).gt.eps)go to 30
      if(i.ne.1)go to 32
 31   td(i)=amax1(t,t0(jk))
      tf(i)=td(i)+tet(jk)
      ia(i)=jk
      ib(jk)=i
      t=tf(i)
      B(i,jk)=1
      j1=jk
      go to 300
 32   if((j1.eq.0).and.(t0(jk).gt.t+eps))go to 31
      if(j1.ne.0)go to 33
      tt=t1(jk)
      j1=jk
      go to 30
 33   if(t0(jk).gt.t+eps)go to 34
      if(t1(jk).ge.tt-eps)go to 30
      j1=jk
 30   continue
      if(j1.eq.0)go to 36
 34   td(i)=amax1(t,t0(j1))
      tf(i)=td(i)+tet(j1)
      ia(i)=j1
      ib(j1)=i
      t=tf(i)
      B(i,j1)=1
 300  if(t.le.t1(j1)+eps)go to 100
c-----------------------------------------------------------------------------
c  LE DERNIER PRODUIT PLACE SE TERMINE APRES SON INSTANT DE FIN DE FAB AU PLUS
c  TARD .RECHERCHE DU RANG A PARTIR DUQUEL L'ORDONNANCEMENT DEVRAIT CHANGER.
c-----------------------------------------------------------------------------
      do 40 ii=i,1,-1
      j=ia(ii)
      if((t0(j1).gt.tf(ii)+eps).or.(t1(j).le.t1(j1)+eps))go to 40
      do 45 nk=ii,i
      jk=ia(nk)
      ia(nk)=0
```

```
      ib(jk)=0
      if(ii.eq.1)t=0.
      if(ii.ne.1)t=tf(ii-1)
      if(nk.eq.ii)go to 45
      do 50 il=1,n
      jl=A(nk,il)
      if(jl.ne.0)B(nk,jl)=0
 50   continue
 45   continue
      i=ii
      go to 200
 40   continue
      do 55 nk=1,i
      jk=ia(nk)
      ia(nk)=0
      ib(jk)=0
      t=0.
      if(nk.eq.1)go to 55
      do 60 il=1,n
      B(nk,il)=0.
 60   continue
 55   continue

      i=1
      go to 200
 36   if(i.eq.1)go to 600
      if(i.ne.n)go to 400
      do 75 il=n,1,-1
      if(il.eq.1)go to 600
      kk=ia(il)
      if(tf(il-1).ge.t0(kk)-eps)go to 75
      i=il
      go to 36
 75   continue
 400  i=i-1
      jk=ia(i)
      ia(i)=0
      ib(jk)=0
      if(i.eq.1)t=0.
      if(i.ne.1)t=tf(i-1)
      tf(n)=0.
      do 65 il=1,n
      B(i+1,il)=0.
 65   continue
      go to 200
 500   if((T.lt.tf(n)-eps).and.(i.gt.1))go to 400
       if((T-tf(n)).gt..01)go to 72
       do 90 j=1,n
       if(id(j).eq.0)go to 72
 90    continue
       if(i.gt.1)go to 400
c-----------------------------------------------------------------------
c  SAUVEGARDE DU MEILLEUR ORDONNANCEMENT OBTENU.
c-----------------------------------------------------------------------
 72   T=tf(n)
      do 70 l=1,n
      id(l)=ia(l)
      ttd(l)=td(l)
      ttf(l)=tf(l)
      if(id(l).eq.0)go to 600
 70   continue
      if(i.gt.1)go to 400
```

```
c-----------------------------------------------------------------------
c  AUCUN ORDONNANCEMENT ADMISSIBLE N'EXISTE.
c-----------------------------------------------------------------------
 600   do 80 j=1,n
       if(id(j).ne.0)go to 80
       write(0,71)
 71    format(4x,"PAS DE SOLUTION")
       go to 1000
 80    continue
1000   return
       end
```

```
***************
*   DONNEES   *
***************
```

produit	td au plus tot	duree de fab	tf au plus tard
1	0.00	4.00	19.00
2	3.00	4.00	12.00
3	10.00	5.00	16.00
4	1.00	5.00	21.00

```
***************
*  RESULTATS  *
***************
```

L'ORDONNANCEMENT SUIVANT EST OPTIMAL

produit	temps de debut	temps de fin
4	1.00	6.00
2	6.00	10.00
3	10.00	15.00
1	15.00	19.00

r 14:05 0.104 0 level 2

CONCLUSION

Ce papier complète un rapport de recherche antérieur (n° 325 Aôut 84) dans lequel nous proposions des algorithmes de recherche de solutions admissibles pour le même problème. Il se prolongera par la recherche de solutions admissibles et optimales dans le cas où un changement de fabrication nécéssite un changement d'outil.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. MINET et SEDILLOT :
Integration of real-time andconsistency constraints in didtributed data bases : the sigma approach.

2. J.A. STANKOVIC, W. ZHAO et K. RAMAMRITHAM :
Scheduling tasks with resource requirements in hard real-time systems.

3. A.H.G. RINNOOY KAN :
Machine scheduling problems classification, complexity and computations.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique